

**LABORATORIUM INFORMATYCZNE SYSTEMY
WSPOMAGANIA DYSPOZYTORÓW**

**Estymacja wektora stanu w prostym
układzie elektroenergetycznym**

Autorzy:

dr inż. Zbigniew Zdun

mgr inż. Krzysztof Księżyk

mgr inż. Tomasz Zdun

Wprowadzenie

Podczas ćwiczenia zostanie zaprezentowany algorytm estymacji wektora stanu metodą najmniejszych kwadratów w prostym układzie elektroenergetycznym. Estymator wektora stanu pozwala na określenie najbardziej prawdopodobnego stanu pracy systemu na podstawie zebranych pomiarów. Znajomość stanu systemu (wektora stanu) umożliwia odtworzenie. Dzięki niemu możliwe jest zbudowanie modelu układu, który w następnej kolejności może być poddany analizom bezpieczeństwa, np. sprawdzeniu reguły N-1.

1 Minimalizacja błędu średniokwadratowego

Wektor stanu $\mathbf{X}$ dla obiektów statycznych jest to najmniejsza liczba danych, które w sposób jednoznaczny pozwalają określić wartości pozostałych danych charakteryzujących obiekt. Np. dla systemu elektroenergetycznego w stanie ustalonym wektorem stanu jest wektor napięć zespolonych (moduł + kąt) dla każdego węzła. Znajomość wektora napięć pozwala na obliczenie pozostałych wielkości charakterystycznych dla systemu czyli między innymi: prądy gałęziowe i węzłowe, moce gałęziowe i węzłowe, straty mocy czynnej i biernej, prądy ładowania gałęzi. Wyznaczenie tych wielkości odbywa się na podstawie funkcji $h_i(\mathbf{X})$, których znajomość wynika z praw elektrotechniki (prawo Ohma, prawa Kirchhofa).

W systemie elektroenergetycznym zainstalowanych jest wiele mierników, które dokonują pomiarów takich wielkości, jak moduł napięcia, przepływy mocy w gałęziach, na generatorach i odbiorach. Mierzone wartości z_i powiązane są z wektorem stanu $\mathbf{X}$ wspomnianymi funkcjami $h_i(\mathbf{X})$. Ponieważ jednak każdy pomiar jest obarczony błędem ε_i , dlatego zależność pomiędzy pomiarem a wartością wyliczoną z wektora stanu może być zapisana w następujący sposób:

$$z_i = h_i(\mathbf{X}) + \varepsilon_i \quad (1)$$

Wektor stanu jest niewiadomą, która może być oszacowana z jak najmniejszym błędem na podstawie dokonanych pomiarów. Estymacja wektora stanu metodą najmniejszych kwadratów polega na minimalizacji sumy kwadratów błędów:

$$y = \sum_{i=1}^M \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^M (z_i - h_i(\mathbf{X}))^2 \quad (2)$$

gdzie M oznacza liczbę pomiarów

Powyższe równanie może być zapisane w postaci macierzowej:

$$y = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{X})]^T \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{X})] \quad (3)$$

gdzie $\mathbf{z}$ oznacza wektor pomiarów, a $\mathbf{h}(\mathbf{X})$ oznacza wektor funkcji łączących wektor stanu z wielkościami mierzonymi

W dalszej części niniejszej instrukcji będzie przyjęte, że funkcja $h_i(\mathbf{X})$ jest funkcją liniową:

$$h_i(\mathbf{X}) = a_{i,1} \cdot x_1 + a_{i,2} \cdot x_2 + \dots + a_{i,N} \cdot x_N = \sum_{j=1}^N a_{i,j} \cdot x_j \quad (4)$$

W związku z tym wektor funkcji $\mathbf{h}(\mathbf{X})$ można zapisać równania macierzowego:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{A}$ – prostokątna macierz współczynników o wymiarze $M \times N$ (M - liczba pomiarów, N - liczba zmiennych stanów), $\mathbf{X}$ – wektor stanu o wymiarze $N \times 1$

Ponownie przepisując równanie (3) otrzymuje się:

$$y = [\mathbf{z} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}]^T \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}] \quad (6)$$

Po przekształceniu wynikającym z rachunku macierzowego otrzymuje się:

$$\begin{aligned} y &= [\mathbf{z}^T - \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T] \cdot [\mathbf{z} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}] = \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \\ &= \mathbf{z}^T \cdot \mathbf{z} - 2 \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} + \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \end{aligned} \quad (7)$$

Jak już zostało wspomniane, poszukiwany jest taki estymowany wektor $\mathbf{X}$, który będzie minimalizował powyższą funkcję. Jej ekstremum znajduje się w punkcie, w którym pochodna przyjmuje wartość 0:

$$\min(y) \rightarrow \frac{\delta y}{\delta x} = 0 \quad (8)$$

Z warunku (8) wynika:

$$-2 \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} + 2 \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (9)$$

I dalej:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} \quad (10)$$

Macierz $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ jest macierzą kwadratową o wymiarze $N \times N$ i określana jest nazwą macierzy wzmocnień. Jeżeli macierz **wzmocnień** jest odwracalna, wówczas można obliczyć przybliżony wektor stanu:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} \quad (11)$$

Równanie (11) pozwala wyznaczyć przybliżony wektor stanu dla układu liniowego, tzn. takiego, w którym wielkości mierzone mogą być wyznaczone na podstawie funkcji liniowych z wektora stanu zgodnie ze wzorem (5).

2 Prosty przykład obliczeniowy

Dany jest węzeł, do którego przyłączone są trzy linie stałego napięcia. Mierzona jest wartość prądu wpływającej do węzła każdą z tych linii. Pomiary wynoszą:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Zgodnie z prawem Kirchhoffa suma tych trzech prądów powinna być zero, a jest -2. Wynika to z błędu pomiarowego.

W następnym kroku należy wybrać wektor stanu. W tym przypadku jako zmienne stanu można przyjąć dwie wartości prądu:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Zmierzone wartości prądu mogą być wyliczone z wektora stanu na podstawie następujących równań:

$$\begin{cases} I_1 = x_1 \\ I_2 = x_2 \\ I_3 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (14)$$

Równanie trzecie wynika z prawa Kirchhoffa: suma prądów wpływająca i wypływających do węzła jest równa zero. Ten układ równań można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Wstawiając wyliczone macierz $\mathbf{A}$ oraz wektor $\mathbf{z}$ do równania (11) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{z} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 10,667 \\ -4,333 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Po wyznaczeniu estymowanego wektora stanu można obliczyć wartości wielkości mierzonych:

$$\begin{cases} I_1 = x_1 = 10,667 \\ I_2 = x_2 = -4,333 \\ I_3 = -x_1 - x_2 = 6,333 \end{cases} \quad (17)$$

3 Równania metody stałoprądowej dla systemu elektroenergetycznego

W sieci elektroenergetycznej wektorem stanu jest wektor napięć węzłowych w postaci liczb zespolonych: moduł i kąt. Kąt napięcia w jednym węźle musi zostać przyjęty jako znany, najczęściej równy 0. Kąty pozostałych napięć są podawane w odniesieniu do niego. Węzeł ten nazywany jest węzłem bilansującym.

W uproszczonej metodzie stałoprądowej można przyjąć również, że wartości napięć stałe i wynoszą np. 100% napięcia znamionowego (czyli 1 w jednostkach względnych). Zatem wektor stanu dla sieci przesyłowej ma następującą postać:

$$\mathbf{X}^T = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1}] \quad (18)$$

gdzie N – liczba węzłów.

Znajomość napięć węzłowych pozwala wyznaczyć przepływy w gałęziach według równania:

$$P_{i-j} = \frac{U_i \cdot U_j}{X_{i-j}} \cdot (\delta_i - \delta_j) \quad (19)$$

gdzie:

i – indeks węzła początkowego

j – indeks węzła końcowego

U_i – moduł napięcia w węźle i

δ_i – kąt napięcia w węźle i

U_j – moduł napięcia w węźle j

δ_j – kąt napięcia w węźle j

X_{i-j} – reaktancja gałęzi łączącej węzły i oraz j

Należy zauważyć, że powyższe równanie jest funkcją liniową ze względu na kąty δ_i i δ_j .

Suma mocy wpływających i wypływających liniami do węzła równa jest mocy węzłowej, tzn. mocy wstrzykiwanej do węzła przez generator lub też mocy wypływającej z węzła poprzez transformator odbiorczy (moc ze znakiem ujemnym). Czyli moc węzłowa może być wyznaczona z następującego wzoru:

$$P_i = P_{i-j} + P_{i-k} + \dots \quad (20)$$

4 Estymacja wektora stanu w prostym układzie elektroenergetycznym

Dany jest prosty system elektroenergetyczny składający się z trzech węzłów i trzech linii połączonych w trójkąt. Impedancja gałęzi 1-2 wynosi 1, a gałęzi 1-3 oraz 2-3 wynosi 0,5 (w jednostkach względnych).

Nieznany wektor stanu dla macierzy

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Węzeł 3 jest węzłem bilansującym, więc kąt napięcia w tym węźle jest znany i wynosi 0.

Wektor pomiarów posiada następującą postać:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_{1-2} \\ P_{3-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,85 \\ -0,26 \\ 0,43 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Równania łączące wektor stanu z wielkościami mierzonymi dla analizowanego układu elektroenergetycznego wyglądają jak następuje:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot (\delta_1 - \delta_2) + \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (\delta_1 - 0) \\ P_{1-2} = \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot (\delta_1 - \delta_2) \\ P_{3-2} = \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (0 - \delta_2) \end{cases} = \begin{cases} P_1 = 1,5 \cdot \delta_1 - \delta_2 \\ P_{1-2} = \delta_1 - \delta_2 \\ P_{3-2} = -0,5 \cdot \delta_2 \end{cases} \quad (23)$$

Z powyższego układu równań można wyznaczyć macierz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Wstawiając wektor pomiarów oraz macierz $\mathbf{A}$ do równania (11), można teraz obliczyć estymowany wektor stanu:

$$\mathbf{X} = \left(\begin{bmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1,5 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,85 \\ -0,26 \\ 0,43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,1447 \\ -0,8741 \end{bmatrix} \quad (25)$$

W rezultacie wektor stanu jako wektor zawierający wszystkie kąty napięć węzłowych ma postać:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1,1447 \\ -0,8741 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Po wyznaczeniu wektora stanu można obliczyć moce węzłowe:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot (-1,1447 + 0,8741) + \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (-1,1447 - 0) = -0,84 \\ P_2 &= \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot (-0,8741 + 1,1447) + \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (-0,8741 - 0) = -0,17 \\ P_3 &= \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (0 + 1,1447) + \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (0 + 0,8741) = 1,01 \end{aligned} \quad (27)$$

i przepływy gałęziowe:

$$\begin{aligned} P_{1-2} &= \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot (-1,1447 + 0,8741) = -0,27 \\ P_{2-1} &= \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot (-0,8741 + 1,1447) = 0,27 \\ P_{1-3} &= \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (-1,1447 - 0) = -0,57 \\ P_{3-1} &= \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (0 + 1,1447) = 0,57 \\ P_{2-3} &= \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (-0,8741 - 0) = -0,44 \\ P_{3-2} &= \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot (0 - 0,8741) = 0,44 \end{aligned} \quad (28)$$

5 Przebieg ćwiczenia.

W czasie ćwiczeń należy wykonać estymację wektora stanu w poniższym układzie elektroenergetycznym, dla parametrów linii i wartości pomiarów przekazanych przez prowadzącego ćwiczenia. Po obliczenia kątów napięć węzłowych, należy wyliczyć wszystkie moce węzłowe i przepływy gałęziowe.

